学校编码: 10384　　　　　　　　　　　　　　　　　分类号: ________ 密级: ________
学　　号: 19020090153597　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC: _______

厦门大学

博　士　学　位　论　文

Banach 空间的有界闭凸集与闭球的交

Bounded Closed Convex Sets and Intersection of Closed Balls of Banach Spaces

指导教师姓名: 程立新　教授
专 业 名 称: 基 础 数 学
论文提交日期: 2012年 4 月
论文答辩时间: 2012年 6 月
学位授予日期: 2012年 　月

答辩委员会主席: ____________________
评　　阅　　人: ____________________

2012年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）:

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于:

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）:

年　月　日

中文摘要

设 X 为实 Banach 空间. 称 X 具有 Mazur 交性质(简称MIP), 如果 X 中的每个有界闭凸集均可表示成闭球的交. 本文通过凸函数的表示给出了 Banach 空间中三种球交性质的解析特征. 全篇文章组织如下:

第一章, 在绪论里, 我们主要介绍 Banach 空间各种球交性质研究的历史概况.

第二章, 我们讨论了 Banach 空间中广义实值的下半连续真凸函数及其对偶的一些性质. 例如, 我们得到:

设 f 为 X 上的下半连续真凸函数, f^* 是实值的. 则 f^* 在 X^* 上是 b-w^* 连续的当且仅当 $\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{f(x)}{\|x\|}=\infty$, 且对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}$, 集合 $C_\alpha=\{x\in X: f(x)\le\alpha\}$ 为紧集.

第三章, 我们首先给出了 Mazur 交性质(MIP)的解析特征. 即:

Banach 空间 X 具有 MIP 当且仅当 X 上的任意下半连续真凸函数 f 及有界闭凸集 $B\subset X$, 存在具有如下表示形式的凸函数族 G:

$$g(x)=\begin{cases} r_0-\sqrt{R^2-\|x-x_0\|^2} & \|x-x_0\|\le R \\ +\infty & \text{其它}. \end{cases} \tag{1}$$

其中, $x_0\in X,\ r_0\in\mathbb{R}, R\in\mathbb{R}^+$, 使得

$$f_B(x)\equiv f(x)+\delta_B(x)=\sup_{g\in G} g(x),\ \forall x\in X.$$

具有上述表示形式的凸函数 g, 我们称为球投影函数.

此外, 我们也讨论可分空间 Mazur 交性质的情形:

Banach 空间 X 可分且具有 MIP 当且仅当存在 X 上可数的球投影函数族 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得对任意具有有界定义域的下半连续真凸函数 f, f 均可表示成 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中某些函数的上包络.

第四章, Banach 空间 X 称为具有性质CI(简称CIP), 如果 X 中的每个有界紧凸集均可表示成闭球的交. 称 X^* 具有w^* Mazur 交性质(简称MIP*), 如果 X^* 中的每个有界w^*-闭凸集均可表示成闭球的交. 在这一章我们利用鞍函数的 minmax 定理给出了这两种性质的解析特征. 即:

Banach 空间 X 具有 CIP 的充分必要条件是对 X 上的具有紧致的有效定义域的下半连续真凸函数 f, 存在具有如下表示形式的 Lipschitz 凸函数族 H :

$$h(x^*) = R_0\sqrt{1+\|x^*\|^2} + \langle x^*, x_0\rangle + r_0,\ \forall x^* \in X^*$$

其中, $R_0 > 0, r_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in X$,使得 f^* 可表示成 H 中函数的下确界.
具有上述表示形式的凸函数 h, 我们称为球共轭函数.

对 MIP*, 我们分别用球投影函数及球共轭函数的凸函数来刻画.

Banach 空间 X^* 具有 MIP* 与下列命题之一等价:

(1) X 上的任意 Lipschitz 凸函数 f, 存在 X^*上的一族球投影函数 G^*, 使得 f^* 可表示成 G^* 中函数的上确界.

(2) X^* 上的任意 w* 下半连续且具有 w* 紧的有效定义域的真凸函数 f, 存在 X^{**} 一族球共轭函数 H^{**}, 使得 f^* 可表示成 H^{**} 中函数的下确界.

类似地, 我们给出性质 $(I_n)_{n\geq 1}$ 的解析特征. 称 Banach 空间 X 具有性质 $(I_n)_{n\geq 1}$, 如果 X 上的每一个有限维紧凸子集均可表示成闭球的交.

关键词: Mazur 交性质　凸函数　Banach 空间

Abstract

A Banach space is said to have Mazur's intersection property (MIP) provided every bounded closed convex subset of it can be represented as an intersection of closed balls. In this paper, we give some analytic characterizations of MIP and its two generalizations: MIP* and CIP via convex functions. This paper is organized as follows.

In Chapter 1, we give a survey of Mazur's intersection property and its generalizations in Banach spaces.

In Chapter 2, we present some properties about extended real-valued lower semi-continuous proper convex functions and their conjugates. For example, we show that if f is a lower semi-continuous proper convex function, then f^* is b-w^* continuous if and only if $\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \infty$ and for each $\alpha \in \mathbb{R}$ the level set $S(f,\alpha) \equiv \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ is compact.

In Chapter 3, we show that a sufficient and necessary condition for a Banach space X admitting Mazur's intersection property is that for every extended real-valued lower semi-continuous proper convex function f defined on it and for every bounded set $B \subset \mathrm{dom} f$ there exists a family G of convex functions of the form $g = r_0 - \sqrt{R^2 - \|\cdot - x_0\|^2}$ (for some $r_0 \in \mathbb{R}$, $R \geq 0$ and $x_0 \in X$) dominated by f such that $f(x) = \sup_{g\in G} g(x)$, $\forall x \in B$. And we call such functions g ball projection functions.

In addition, we also study the MIP in separable Banach spaces. We prove that a Banach space X is separable and admits MIP if and only if there exists a countable family G of ball projection functions, so that every lower semi-continuous proper convex

function f on X with bounded effective domain is the sup-envelope of some functions in G.

We say that a (dual) Banach space $X\,(X^*)$ has CIP (MIP*), if every compact (w* compact) convex subset on $X\,(X^*)$ is an intersection of closed balls. In Chapter 4, making use of a minimax theorem of saddle functions, we characterize the CIP and MIP* in an analytic form. The main results of this chapter are as follows.

X admits the CIP if and only if for every lower semi-continuous proper convex function f with compact effective domain dom$f$ there is a family H of the form $h(x^*) = R_0\sqrt{1+\|x^*\|^2} + \langle x^*, x_0\rangle + r_0$ for all $x^* \in X^*$ and for some $r_0 \in \mathbb{R}$, $R_0 \geq 0$, $x_0 \in X$, such that $f^*(x^*) = \inf_{h\in H} h(x^*)$. And we call such functions h ball conjugate functions.

For MIP*, we characterize it via ball projection functions and ball conjugate functions respectively. We obtain that

X^* has MIP* if and only if one of the following statements holds.

(1) Every Lipschitz convex function f on X, there is a family G^* of ball projection functions on X^* such that f^* can be represented to be the sup-envelop of some functions of G^*.

(2) Every w* lower semi-continuous proper convex function f on X^* with w*-compact effective domain , there is a family H^{**} of ball conjugate functions on X^{**} such that f^* can be represented to be the inf-envelop of the functions of H^{**}.

Similarly, the property $(I_n)_{n\geq 1}$ (the property of X satisfying every finite dimensional compact convex subset is an intersection of closed balls) can also be characterized.

Key Words: Mazur's intersection property, convex function, Banach space

目　　录

中文摘要 **I**

英文摘要 **III**

第 一 章 绪　　论 **1**

§1.1 有关球交性质的几何特征 · · · · · · 1

§1.2 Mazur 交性质的稳定性及再赋范性质 · · · · · · 5

§1.3 MIP, MIP* 与凸函数的微分 · · · · · · 7

§1.4 本文的主要结果 · · · · · · 9

第 二 章 凸函数及其共轭函数的性质 **11**

§2.1 有关凸函数的基本定义和性质 · · · · · · 11

§2.2 有关凸函数更多的性质 · · · · · · 13

第 三 章 MIP 的解析特征 **19**

§3.1 球投影函数 · · · · · · 19

§3.2 MIP 的解析特征 · · · · · · 20

§3.3 可分空间的 Mazur 交性质 · · · · · · 22

第 四 章 CIP 及 MIP* 的解析特征 **26**

§4.1 球共轭函数 26

§4.2 CIP 的对偶特征 27

§4.3 关于对偶空间的 w* Mazur 交性质 30

参考文献 **35**

附　　录 **40**

致　　谢 **41**

Contents

Abstract (in Chinese) I

Abstract (in English) II

Chapter 1 Introduction 1

§1.1 Geometric characterizations of MIP and its generalizations 1

§1.2 The stability and renorming property of MIP 5

§1.3 MIP, MIP* and the differentiability of convex functions 7

§1.4 Main results 9

Chapter 2 On properties of convex functions and their conjugates 11

§1.1 Some basic definitions and properties of convex functions 11

§1.2 More on properties of convex functions 13

Chapter 3 Analytic characterizations of the MIP 19

§2.1 Ball projection functions 19

§2.2 Analytic characterizations of MIP 20

§2.3 Mazur's intersection property of separable spaces 23

Chapter 4 Analytic characterizations of CIP and MIP* 26

§3.1 Ball conjugate functions 26

§3.2 Dual characterizations of CIP 27

§3.3 On w* Mazur's intersection property of dual spaces 30

References **35**

Appendix **40**

Acknowledgements **41**

第 一 章 绪　　论

1933 年, Mazur 在文献[20] 引入并开始研究欧氏空间性质: 每个有界闭凸集可以表示成闭球的交. 同时他证明了 $Fréchet$ 可微的 Banach 空间是具有这一性质的. 后来人们就以他名字将其命名为 Mazur 交性质, 简称 MIP.

Mazur 交性质及其相关课题的研究长达近 80 年. 除了 Mazur 交性质外, 人们还研究其它种球交性质, 它们可视为 MIP 的变异体. 我们先给出定义:

设 X 为 Banach 空间, X^* 为其对偶空间. 则

(1) 称 X^* 具有 w^* Mazur 交性质(简称MIP*), 如果 X^* 中的每个有界 w^*-闭凸集均可表示成闭球的交.

(2) 称 X 具有 CI 性质(简称CIP), 如果 X 中的每个紧凸集均可表示成闭球的交.

(3) 称 X 具有性质 (I_n), 如果 X 中每一个维数小于等于 n 的紧凸集均可表示成闭球的交. 其中集合的维数是指它生成的仿射子空间的维数.

(4) 称 X 具有 WI 性质(简称WIP), 如果 X 中的每个 w-紧凸集均可表示成闭球的交.

下面我们将从球交性质的刻画, 稳定性, 再赋范性质以及 MIP, MIP*与凸函数的微分之间的联系这几方面来介绍.

§1.1 有关球交性质的几何特征

对特殊的 Banach 空间 MIP 特征的研究, Phelps[25]考虑有限维情形, 证明了:

定理 1.1 ([25]) 设 X 为有限维空间, 则 X 具有 MIP 当且仅当其对偶空间 X^* 的单位球的端点在其单位球面中是范数稠密的.

Sullivan[4] 得到光滑空间具有 Mazur 交性质的特征. 受到Sullivan[4] 重要思想的启发, 1978年, Giles, Gregory, Sims[13]得到了一般 Banach 空间具有 MIP 的特征:

定理 1.2 ([13]) 设 X 为 Banach 空间, 则下列命题等价:

(i) X 具有 Mazur 交性质;

(ii) X 上的每一个支撑映射将 S_X 中的范数稠密集映为 S_{X^*} 的范数稠密集.

(iii) B_{X^*} 的 w*-可凹点在 S_{X^*} 中范数稠密.

在这个定理中, B_X 及 S_X 分别表示 X 的闭单位球和单位球面. 本文我们将通用这些符号. 支撑映射是将 $x(\in X)$ 映为 x 的范数为 1 的支撑泛函的映射. $f \in S_{X^*}$ 称为 B_{X^*} 的一 w*-可凹点,如果任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $x \in S_X$ 及 $\alpha \in (0,1)$ 使得由 x 决定的 w*-切片 $\mathcal{S} = \{g \in B_{X^*} : g(x) > 1 - \alpha\}$ 包含 f, 且 $\operatorname{diam} \mathcal{S} < \epsilon$.

在处理有关切片的问题时, 我们常常要用到切片的一个基本的有用的性质: 设 $\mathcal{S}$ 为由 $x \in S_X$ 决定的包含 $f \in S_{X^*}$ 的 B_{X^*} 的 w*-切片, 则存在 $\epsilon > 0$, 使得对任意的 $y \in S_X$, 且 $\|y - x\| < \epsilon$, 存在由 y 决定的w*-切片 $\mathcal{S}'$ 使得 $f \in \mathcal{S}'$ 且 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

值得一提的是, [13]考虑 X 中一种比范数 $Fr\acute{e}chet$ 可微点更一般的集合 $M_\epsilon(X)$, $\forall \epsilon > 0$. 通过对这族集合及次微分映射在这族集合下的像的稠密性的刻画, 得到 MIP 的特征. 之后, 人们对其它球交性质的刻画和推广, 其本质是推广下面两引理. 即

引理 1.3 ([13]) 任意给定 $\epsilon > 0$, 下列命题等价:

(i) $x \in M_\epsilon(X) := \{x \in S_X : \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ 0<t<\delta}} \frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|-2}{t} < \epsilon\}$;

(ii) x 决定了 B_{X^*} 中一直径 $< \epsilon$ 的 w*-切片.

注意到一个集合 A 可表示成闭球的交当且仅当对任意的 $x \notin A$, 存在球 $B \supseteq A$, 但 $x \notin B$. 因此,下面引理是 Mazur 交性质的局部性质.

引理 1.4 ([13]) 设 $f \in S_{X^*}$, 则下列命题等价:

(i) $f \in \cap_{\epsilon>0} \overline{\partial \|M_\epsilon(X)\|}$;

(ii) 对任意的有界集 C, 如果 $\inf f(C) > 0$, 则存在包含 C 但不包含 0 的闭球;

(iii) $\forall \epsilon > 0$, 存在 $x \in S_X$ 及 $\delta > 0$, 使得对任意的 $y \in S_X \cap B(x, \delta)$, 有 $\partial \|y\| \subseteq B(f, \epsilon)$.

除了 Mazur 交性质外, 其它球交性质的研究也在稳步发展着. 在同一篇文章[13], 作者通过对上述两引理的对偶化, 得到对偶空间 X^* 具有 w^*-Mazur 交性质的特征.

定理 1.5 ([13]) 设 X 为 Banach 空间, 则下列命题等价:

(i) X^* 具有 MIP*;

(ii) X 上的每一个从 $\partial\|S_X\|$ 到 S_X 的支撑映射将 $\partial\|S_X\|$ 中的范数稠密集映为 S_X 的范数稠密集.

(iii) B_X 的可凹点在 S_X 中范数稠密.

对于紧凸集球交性质(简称CIP)的研究, Whitfield, Zizler[7] 及 Sersouri[29] 分别得到 Banach 空间具有 CIP 的充分及必要条件. 即:

定理 1.6 ([7],[29]) Banach 空间 X 中的每一个紧凸子集均可表示成闭球的交当且仅当 B_{X^*} 的端点生成的锥在 X^* 中是 b-w^* 稠密的.

其中, 一集合 $A \subset X$ 生成的锥定义为 $\{rx : r \in \mathbb{R}^+, x \in A\}$. X^* 上的 b-w^* 拓扑是在 X 中的紧集上一致收敛的拓扑.

V. Zizler[35] 及 Vanderwerff[34] 考虑 w-紧凸集的球交性质(简称WIP). Vanderwerff[34] 证明了每个 Banach 空间 X 均可赋予等价范数使得在这个范数下, X 中的每个w-紧凸子集均可表示成闭球的交. 对 WIP, 目前还没有相应的几何刻画.

性质 (I_n) 是由 Sersouri[39] 提出并研究的, 他证明了 Banach 空间 X 具有性质 (I_n) 的充分必要条件是对任意的 $f \in X^*$, 任意 X 中的 $n+1$ 个点 $x_1, \ldots, x_{n+1}$, 及任意的 $\epsilon > 0$, 存在由 B_{X^*} 的端点生成的锥中的元 g, 使得 $\sup_i |(f-g)(x_i)| < \epsilon$. 从而得到:

定理 1.7 ([39]) Banach 空间 X 中的每个有限维紧凸子集均可表示成闭球的交当且仅当由 B_{X^*} 的端点生成的锥在 X^* 中 w* 稠密.

从上面几种球交性质的特征来看, 它们都是用相应的特殊的点集(如可凹点,端点等)生成的锥在相应的拓扑下的稠密性来刻画的. 事实上, Chen, Lin[10] 推广了 w* 可凹点及端点的定义, 使得上述几种球交性质的刻画得到统一, 即它们都成为文献[10] 中主要结果的推论. 现在我们介绍一下 [10] 的做法及主要定理.

设 $\mathcal{A}$ 为满足下列条件的 X 中的某一有界集族:

(1) 若 $A \in \mathcal{A}$, $C \subseteq A$, 则 $C \in \mathcal{A}$;

(2) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, $x \in X$, 有 $A + x \in \mathcal{A}$, $A \cup \{x\} \in \mathcal{A}$;

(3) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, $\overline{\text{aco}}\, A \in \mathcal{A}$.

对 X 中的有界集 A, 定义 $\|f\|_A = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$, $f \in X^*$, 则 $\|\cdot\|_A$ 为 X^*上的一半范. 设 $K \subset X^*$, K 在半范 $\|\cdot\|_A$ 下的直径记为 $\mathrm{diam_A K = \sup\{\|f-g\|_A : f, g \in K\}}$.

定义 1.8 ([10]) 称 $f \in S_{X^*}$ 为 B_{X^*} 的 $\mathcal{A}$-可凹点, 如果任意的 $A \in \mathcal{A}, \epsilon > 0$, 存在 B_{X^*} 的一 w^* 切片 $\mathcal{S}$, 使得 $f \in \mathcal{S}$ 且 $\mathrm{diam_A}\mathcal{S} < \epsilon$.

上述定义中, 显然地, 当 $\mathcal{A}$ 为 X 中所有有界集构成的集族时, $\mathcal{A}$-可凹点与 w^* 可凹点一致. 因为 B_{X^*} 是 w^* 紧的, 且其上的 w^* 拓扑与 b-w^* 拓扑一致, 因此, 当 $\mathcal{A}$ 为 X 中所有紧子集构成的集族时,$\mathcal{A}$-可凹点恰是端点(见[27]). 容易验证, $\mathcal{A}$ 为 X 中所有紧子集构成的集族及为 X 中所有有限维紧子集构成的集族时二者对应的$\mathcal{A}$-可凹点是一致的.

记 $\tau_{\mathcal{A}}$ 为半范族 $\{\|\cdot\|_A : A \in \mathcal{A}\}$ 生成的 X^* 上的局部凸拓扑. 易知, 当 $\mathcal{A}$ 分别为上述所说的三种集族时, $\tau_{\mathcal{A}}$ 分别为 X^* 上的范数拓扑, b-w^* 拓扑及w^* 拓扑.

下面这个定理给出了$\mathcal{A}$-可凹点的特征:

定理 1.9 ([10]) 设 $f_0 \in S_{X^*}$, 则下列命题等价:

(i) f_0 是 B_{X^*} 的 $\mathcal{A}$-可凹点.

(ii) 对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 如果 $\inf f_0(A) > 0$, 则存在球 $B \subset X$, 使得 $\inf f_0(B) > 0$.

该定理在文献[10]中所取的作用相当于引理1.4在文献[13]中的作用, 也是球交性质的局部化. 因此有

定理 1.10 ([10]) 令 (1) $\mathcal{A}$-可凹点的生成锥在 X^* 上 $\tau_{\mathcal{A}}$-稠密.

(2) $\mathcal{A}$ 中每个闭凸集均可表示成闭球的交.

则 (1) $\Rightarrow$ (2). 若 B_{X^*} 的每个 w^* 切片至少含有一个 $\mathcal{A}$-可凹点, 则 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

在证明稠密性时, 文章常用的技巧是 phelps 的平行超平面引理, 即范数为1 的两个线性泛函 f, g, 如果它们的超平面 $f^{-1}(0)$, $g^{-1}(0)$ 充分接近, 则f 必定与 $\pm g$ 中的一个很接近.由于 B_{X^*}为其端点的 w^* 闭凸包, 因此定理 1.6, 1.7 均为该定理的推论.

Chen, Lin 在[10] 中还给出了存在球可以分离原点与有界集的一个几何特征, 因此也